

第五章 §1 基本计数原理

第1课时 计数原理及其简单应用

班级_____ 姓名_____ 小组_____

【学习目标】 1. 理解分类加法计数原理与分步乘法计数原理. 2. 会用这两个原理分析和解决一些简单的实际计数问题.

【导语】

从我们班推选出两名同学担任正副班长，有多少种不同的选法？如果把我们的同学排成一排，又有多少种不同的排法？要解决这些问题，就要运用有关排列、组合知识．在运用排列、组合方法时，经常要用到分类加法计数原理与分步乘法计数原理．这节课，我们来学习这两个原理．

一、分类加法计数原理

问题1 某全国人大代表明天要从济南前往北京参加会议，他有两类快捷途径可供选择：一是乘飞机，二是乘高铁，假如这天飞机有3个航班可乘，高铁有4个班次可乘．那么该代表从济南到北京共有多少种快捷途径可选呢？



提示 该代表共有 $3+4=7$ (种) 快捷途径可选．

【知识梳理】

分类加法计数原理：完成一件事，可以有 n 类办法，在第1类办法中有 m_1 种方法，在第2类办法中有 m_2 种方法……在第 n 类办法中有 m_n 种方法．那么，完成这件事共有 $N=$ _____ 种方法．（也称“加法原理”）

注意点：(1) 完成这件事的若干种方法可以分成 n 类；

(2) 每类方法都可以完成这件事，且类与类之间两两不交．

例1 (1) 设集合 $A=\{1,2,3,4\}$ ， $m, n \in A$ ，则方程 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1$ 表示焦点位于 x 轴上的椭圆有 ()

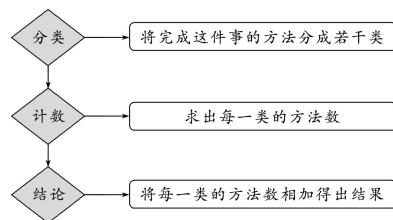
A. 6个 B. 8个 C. 12个 D. 16个

延伸探究 条件不变，结论变为“则方程 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n} = 1$ 表示焦点位于 x 轴上的双曲线”有 ()

A. 6个 B. 8个 C. 12个 D. 16个

(2) 在所有的两位数中，个位数字大于十位数字的两位数的个数为_____．

反思感悟 (1) 分类时，首先要根据问题的特点确定一个合适的分类标准，然后在这个标准下分类，要做到分类“不重不漏”．



(2)利用分类加法计数原理计数时的解题流程.

跟踪训练 1 (1)一个科技小组有 3 名男同学, 5 名女同学, 从中任选 1 名同学参加学科竞赛, 不同的选派方法共有_____种.

(2)若 $x, y \in \mathbf{N}_+$, 且 $x+y \leq 6$, 则有序自然数对 (x, y) 共有_____个.

二、分步乘法计数原理

问题 2 用前 6 个大写英文字母和 1~9 九个阿拉伯数字, 以 $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ 的方式给教室里的座位编号, 总共能编出多少个不同的号码?

【知识梳理】

分步乘法计数原理: 完成一件事需要经过 n 个步骤, 缺一不可, 做第 1 步有 m_1 种不同的方法, 做第 2 步有 m_2 种不同的方法……做第 n 步有 m_n 种不同的方法, 那么, 完成这件事共有 $N = \underline{\hspace{2cm}}$ 种方法. (也称“乘法原理”)

注意点: (1)完成一件事有多个步骤, 缺一不可; (2)每一步都有若干种方法.

例 2 (1)4 名同学报名参加跑步、跳高、跳远三个项目, 每人报一项, 不同的报名方法数有 () A. 4^3 B. 3^4 C. 7 D. 12

延伸探究 4 名同学争夺跑步、跳高、跳远三个项目的冠军(每项冠军只允许一人获得), 共有多少种可能的结果?

(2)人们习惯把最后一位是 6 的多位数叫作“吉祥数”, 则无重复数字的四位吉祥数(首位不能是零)共有_____个.

跟踪训练 2 (1)一种号码锁有 4 个拨号盘, 每个拨号盘上有从 0 到 9 共十个数字, 这 4 个拨号盘可以组成_____个四位数的号码(各位上的数字允许重复).

(2)从 $-1, 0, 1, 2$ 这四个数中选三个不同的数作为函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的系数, 可组成不同的二次函数共_____个, 其中不同的偶函数共_____个. (用数字作答)

三、两个原理的简单应用

例 3 现有 5 幅不同的国画, 2 幅不同的油画, 7 幅不同的水彩画.

(1)从中任选一幅画布置房间, 有几种不同的选法?

(2)从这些国画、油画、水彩画中各选一幅布置房间, 有几种不同的选法?

(3)从这些画中选出两幅不同种类的画布置房间, 有几种不同的选法?

跟踪训练 3 集合 $A = \{1, 2, -3\}$, $B = \{-1, -2, 3, 4\}$, 从 A, B 中各取 1 个元素, 作为点 $P(x, y)$ 的坐标. (1)可以得到多少个不同的点? (2)这些点中, 位于第一象限的有几个?

■ 课堂小结 ■

1. 知识清单: (1)分类加法计数原理. (2)分步乘法计数原理.

2. 方法归纳: 分类讨论.
3. 常见误区: “分类”与“分步”不清, 导致计数错误.



随堂演练

1. 某学生去书店, 发现 3 本好书, 决定至少买其中 1 本, 则购买方式共有()
A. 3 种 B. 6 种 C. 7 种 D. 9 种
2. 现有 3 名老师、8 名男生和 5 名女生共 16 人. 若需 1 名老师和 1 名学生参加评选会议, 则不同的选法种数为()
A. 39 B. 24 C. 15 D. 16
3. 现有 6 名同学去听同时进行的 5 个课外知识讲座, 每名同学可自由选择其中的 1 个讲座, 不同选法的种数是()
A. 5^6 B. 6^5 C. 30 D. 11
4. 5 名乒乓球队员中, 有 2 名老队员和 3 名新队员. 现从中选出 3 名队员参加团体比赛, 则入选的 3 名队员中至少有 1 名老队员的选法有_____种. (用数字作答)

课时对点练



基础巩固

1. 某同学从 4 本不同的科普杂志, 3 本不同的文摘杂志, 2 本不同的娱乐新闻杂志中任选 1 本阅读, 则不同的选法共有()
A. 24 种 B. 9 种 C. 3 种 D. 26 种
2. 给一些书编号, 准备用 3 个字符, 其中首字符用 A, B , 后两个字符用 a, b, c (允许重复), 则不同编号的书共有()
A. 8 本 B. 9 本 C. 12 本 D. 18 本
3. 已知两条异面直线 a, b 上分别有 5 个点和 8 个点, 则这 13 个点可以确定不同的平面个数为 A. 40
B. 16 C. 13 D. 10
4. 十字路口来往的车辆, 如果不允许回头, 则不同的行车路线有()
A. 24 种 B. 16 种 C. 12 种 D. 10 种
5. 从集合 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 中任取两数 a, b 组成复数 $a+bi$, 其中虚数有()
A. 30 个 B. 42 个 C. 36 个 D. 35 个
6. 满足 $a, b \in \{-1, 0, 1, 2\}$, 且关于 x 的方程 $ax^2+2x+b=0$ 有实数解的有序实数对 (a, b) 的个

数为()

- A. 14 B. 13 C. 12 D. 10

7. 某小区有 4 个门, 为应对疫情防控需求, 规定只能从主门进, 从任一个门出, 共有不同走法_____种.

8. 用 1, 2, 3 这 3 个数字可写出没有重复数字的整数有_____个.

9. 有一项活动, 需从 3 位教师、8 名男同学和 5 名女同学中选人参加.

(1) 若只需 1 人参加, 则有多少种不同的选法?

(2) 若需教师、男同学、女同学各 1 人参加, 则有多少种不同的选法?

10. 用 0, 1, 2, 3, 4, 5 这 6 个数字组成无重复数字的四位数, 若把每位数字比其左邻的数字小的数叫做“渐降数”, 求上述四位数中“渐降数”的个数.

综合运用

11. 某班小张等 4 位同学报名参加 A, B, C 三个课外活动小组, 每位同学限报其中一个小组, 且小张不能报 A 小组, 则不同的报名方法有()

- A. 27 种 B. 36 种 C. 54 种 D. 81 种

12. 计划在 4 个体育馆举办排球、篮球、足球 3 个项目的比赛, 每个项目的比赛只能安排在一个体育馆进行, 则在同一个体育馆比赛的项目不超过 2 项的安排方案共有()

- A. 24 种 B. 36 种 C. 42 种 D. 60 种

13. 从集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 中任取 2 个不同的数, 作为直线 $Ax + By = 0$ 的系数, 则形成不同的直线最多有()

- A. 18 条 B. 20 条 C. 25 条 D. 10 条

14. (多选) 已知集合 $A = \{-1, 2, 3, 4\}$, $m, n \in A$, 则对于方程 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1$ 的说法正确的是()

- A. 可表示 3 个不同的圆 B. 可表示 6 个不同的椭圆
C. 可表示 3 个不同的双曲线 D. 表示焦点位于 x 轴上的椭圆有 3 个

拓广探究

15. 如图所示, 小圆圈表示网络的结点, 结点之间的线段表示它们有网线相连, 连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量. 现从结点 A 向结点 B 传递信息, 信息可以分开沿不同的路线同时传递, 则单位时间内传递的最大信息量为()

- A. 26 B. 24 C. 20 D. 19

